

ОГЛАВЛЕНИЕ

Греческий алфавит	8
Предисловие переводчика	9
Предисловие к третьему изданию	11
Предисловие ко второму изданию	13
Предисловие к первому изданию	14
 Глава 1. Необходимые сведения из анализа	 16
1.1. Элементарная математика	16
1.1.1. Числа, переменные и элементарные функции (16). 1.1.2. Квадратные и кубические уравнения (20). 1.1.3. Площади подобных фигур. Эллипс в качестве примера (23). 1.1.4. Алгебраические кривые второго порядка (24).	
1.2. Дифференциальное и интегральное исчисление	29
1.2.1. Правила дифференцирования (29). 1.2.2. Теорема о среднем значении (30). 1.2.3. Инвариантность дифференциала (30). 1.2.4. Правила интегрирования (31). 1.2.5. Ряд Тейлора (32). 1.2.6. Комплексные переменные (34). 1.2.7. Приближенное представление функций (35). 1.2.8. Якобиан. Функциональная независимость. Замена переменных в многомерных интегралах (36). 1.2.9. Линейная независимость функций. Вронскиан (37). 1.2.10. Интегрирование в квадратурах (37). 1.2.11. Дифференциальные уравнения для семейства кривых (39).	
1.3. Векторный анализ	41
1.3.1. Векторная алгебра (41). 1.3.2. Вектор-функции (43). 1.3.3. Векторные поля (43). 1.3.4. Три классические теоремы об интегралах (45). 1.3.5. Уравнение Лапласа (46). 1.3.6. Дифференцирование детерминантов (46).	
1.4. Представление дифференциальной алгебры	46
1.4.1. Дифференциальные переменные. Полное дифференцирование (47). 1.4.2. Производные высших порядков от произведения и от сложных функций (47). 1.4.3. Дифференциальные функции нескольких переменных (48). 1.4.4. Наглядное представление дифференциальных уравнений (49). 1.4.5. Преобразование производных (50).	
1.5. Вариационное исчисление	52
1.5.1. Принцип наименьшего действия (52). 1.5.2. Уравнения Эйлера–Лагранжа в случае нескольких переменных (53).	
Задачи к главе 1	54

Глава 2. Математические модели	58
2.1. Введение	58
2.2. Природные явления	59
2.2.1. Модели популяции (59). 2.2.2. Экология. Радиоактивные отходы (60). 2.2.3. Законы Кеплера. Гравитационный закон Ньютона (61). 2.2.4. Свободное падение тела вблизи Земли (62). 2.2.5. Метеороид (63). 2.2.6. Модель падения дождя (64).	
2.3. Физика и технические науки	65
2.3.1. Ньютонова модель охлаждения (65). 2.3.2. Механические колебания. Маятник (72). 2.3.3. Разрушение ведущих валов (76). 2.3.4. Уравнение Ван дер Поля (78). 2.3.5. Телеграфное уравнение (79). 2.3.6. Электродинамика (80). 2.3.7. Уравнение Дирака (81). 2.3.8. Динамика жидкости (81). 2.3.9. Уравнения Навье–Стокса (82). 2.3.10. Модель ирригационной системы (82). 2.3.11. Магнитогидродинамика (83).	
2.4. Явление диффузии	84
2.4.1. Линейное уравнение теплопроводности (84). 2.4.2. Нелинейное уравнение теплопроводности (86). 2.4.3. Уравнения Бюргерса и Кортевега–де Фриза (86). 2.4.4. Математическое моделирование в области финансов (87).	
2.5. Биоматематика	87
2.5.1. Смышленные грибы (87). 2.5.2. Модель роста опухоли (89).	
2.6. Волновые явления	90
2.6.1. Малые колебания струны (91). 2.6.2. Колебания мембраны (93). 2.6.3. Минимальные поверхности (95). 2.6.4. Колебания тонких стержней и пластинок (96). 2.6.5. Нелинейные волны (98). 2.6.6. Уравнения Чаплыгина и Трикоми (99).	
Задачи к главе 2	99
 Глава 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Традиционный подход	101
3.1. Введение и элементарные методы	101
3.1.1. Дифференциальные уравнения. Задача с начальным условием (101). 3.1.2. Интегрирование уравнения $y^{(n)} = f(x)$ (103). 3.1.3. Однородные уравнения (103). 3.1.4. Различные типы однородности (106). 3.1.5. Понижение порядка (107). 3.1.6. Линеаризация путем дифференцирования (108).	
3.2. Уравнения первого порядка	108
3.2.1. Уравнения с разделяющимися переменными (108). 3.2.2. Уравнения в полных дифференциалах (109). 3.2.3. Интегрирующий множитель (А. Клеро, 1739) (110). 3.2.4. Уравнение Риккати (112). 3.2.5. Уравнение Бернулли (115). 3.2.6. Однородные линейные уравнения (115). 3.2.7. Неоднородные линейные уравнения. Вариация параметра (116).	
3.3. Линейные уравнения второго порядка	117
3.3.1. Однородные уравнения: суперпозиция (118). 3.3.2. Однородное уравнение: свойства эквивалентности (118). 3.3.3. Однородное уравнение: постоянные коэффициенты (121). 3.3.4. Неоднородное уравнение:	

вариация параметров (123). 3.3.5. Уравнение Бесселя и функции Бесселя (127). 3.3.6. Гипергеометрическое уравнение (127).	
3.4. Линейные уравнения высокого порядка	129
3.4.1. Однородные уравнения. Фундаментальная система (129).	
3.4.2. Неоднородные уравнения. Вариация параметров (129). 3.4.3. Уравнения с постоянными коэффициентами (130). 3.4.4. Уравнение Эйлера (131).	
3.5. Системы уравнений первого порядка	132
3.5.1. Общие свойства систем (132). 3.5.2. Первые интегралы (133).	
3.5.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами (137).	
3.5.4. Вариация параметров для систем (138).	
Задачи к главе 3	141
Глава 4. Уравнения с частными производными первого порядка	143
4.1. Введение.	143
4.2. Однородное линейное уравнение	144
4.3. Неоднородные уравнения частного вида.	145
4.4. Квазилинейные уравнения.	147
4.5. Системы однородных уравнений	150
Задачи к главе 4	153
Глава 5. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка	155
5.1. Уравнения с несколькими переменными.	155
5.1.1. Классификация в фиксированной точке (155). 5.1.2. Сопряженные линейные дифференциальные операторы (157).	
5.2. Классификация уравнений с двумя независимыми переменными	159
5.2.1. Характеристики. Три типа уравнений (159). 5.2.2. Стандартная форма гиперболических уравнений (161). 5.2.3. Стандартная форма параболических уравнений (162). 5.2.4. Стандартная форма эллиптических уравнений (162). 5.2.5. Уравнения смешанного типа (163). 5.2.6. Тип нелинейных уравнений (164).	
5.3. Интегрирование гиперболических уравнений с двумя переменными	165
5.3.1. Решение Д'Аламбера (165). 5.3.2. Уравнения, приводимые к волновому уравнению (166). 5.3.3. Метод Эйлера (169). 5.3.4. Каскадный метод Лапласа (172).	
5.4. Задача с начальными условиями	174
5.4.1. Волновое уравнение (174). 5.4.2. Неоднородное волновое уравнение (176).	
5.5. Смешанная задача. Разделение переменных.	177
5.5.1. Колебания струны с закрепленными концами (178). 5.5.2. Смешанная задача для уравнения теплопроводности (181).	
Задачи к главе 5	182

Глава 6. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения . . .	185
6.1. Введение	185
6.2. Группы преобразований	186
6.2.1. Однопараметрические группы на плоскости (186). 6.2.2. Генератор группы и уравнения Ли (187). 6.2.3. Экспоненциальное отображение (189). 6.2.4. Инварианты и инвариантные уравнения (190). 6.2.5. Канонические переменные (192).	
6.3. Симметрии уравнений первого порядка	194
6.3.1. Первое продолжение генераторов группы (194). 6.3.2. Группа симметрии: определение и основное свойство (194). 6.3.3. Уравнения с заданной симметрией (196).	
6.4. Интегрирование уравнений первого порядка с использованием симметрий	198
6.4.1. Интегрирующий множитель Ли (198). 6.4.2. Интегрирование с применением канонических переменных (201). 6.4.3. Инвариантные решения (204). 6.4.4. Общее решение, получаемое с помощью инвариантных решений (205).	
6.5. Уравнения второго порядка	206
6.5.1. Второе продолжение генераторов группы. Вычисление симметрий (206). 6.5.2. Алгебры Ли (208). 6.5.3. Стандартные формы двумерной алгебры Ли (210). 6.5.4. Метод интегрирования Ли (210). 6.5.5. Интегрирование линейных уравнений с известными частными решениями (216). 6.5.6. Тест линеаризации Ли (218).	
6.6. Уравнения высокого порядка	222
6.6.1. Инвариантные решения. Подход Эйлера к дифференцированию (222). 6.6.2. Интегрирующий множитель (Н.Х. Ибрагимов, 2006) (223). 6.6.3. Линеаризация уравнений третьего порядка (231).	
6.7. Нелинейная суперпозиция	238
6.7.1. Введение (238). 6.7.2. Основная теорема о нелинейной суперпозиции (239). 6.7.3. Примеры нелинейной суперпозиции (244). 6.7.4. Интегрирование систем с применением нелинейной суперпозиции (251).	
Задачи к главе 6	253
 Глава 7. Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными	 256
7.1. Симметрии	256
7.1.1. Определение и вычисление групп симметрии (256). 7.1.2. Групповые преобразования решений (260).	
7.2. Групповые инвариантные решения	262
7.2.1. Введение (262). 7.2.2. Уравнение Бюргерса (263). 7.2.3. Нелинейная задача с граничными условиями (266). 7.2.4. Инвариантные решения для ирригационных систем (268). 7.2.5. Инвариантные решения для модели роста опухоли (270). 7.2.6. Пример из нелинейной оптики (272).	
7.3. Инвариантность и законы сохранения	273
7.3.1. Введение (274). 7.3.2. Предварительные замечания (277). 7.3.3. Теорема Нётер (278). 7.3.4. Лагранжианы высокого порядка (278). 7.3.5. Теоремы сохранения для ОДУ (279). 7.3.6. Обобщение теоремы	

Нётер (280). 7.3.7. Примеры из классической механики (281). 7.3.8. Вывод формулы Эйнштейна для энергии (284). 7.3.9. Законы сохранения для уравнений Дирака (284).	
Задачи к главе 7	286
Глава 8. Обобщенные функции или распределения	289
8.1. Введение в обобщенные функции	289
8.1.1. Эвристическое обсуждение (289). 8.1.2. Определение и примеры распределений (291). 8.1.3. Представления δ -функции как предела (292).	
8.2. Действия с распределениями	293
8.2.1. Умножение на функцию (293). 8.2.2. Дифференцирование (293). 8.2.3. Прямое произведение распределений (293). 8.2.4. Свертка (294).	
8.3. Распределение $\Delta(r^{2-n})$	295
8.3.1. Главное значение над сферой (295). 8.3.2. Решение уравнения Лапласа $\Delta v(r) = 0$ (296). 8.3.3. Вычисление распределения $\Delta(r^{2-n})$ (296).	
8.4. Преобразования распределений	298
8.4.1. Мотивировка линейных преобразований (298). 8.4.2. Замена переменных в δ -функции (299). 8.4.3. Произвольная группа преобразований (299). 8.4.4. Инфинитезимальное преобразование распределений (300).	
Задачи к главе 8	301
Глава 9. Принцип инвариантности и фундаментальные решения	303
9.1. Введение	303
9.2. Принцип инвариантности	304
9.2.1. Формулировка принципа инвариантности (304). 9.2.2. Фундаментальное решение линейных уравнений с постоянными коэффициентами (304). 9.2.3. Приложение к уравнению Лапласа (305). 9.2.4. Приложение к уравнению теплопроводности (307).	
9.3. Задача Коши для уравнения теплопроводности	308
9.3.1. Фундаментальное решение задачи Коши (308). 9.3.2. Получение фундаментального решения задачи Коши из принципа инвариантности (309). 9.3.3. Решение задачи Коши (310).	
9.4. Волновое уравнение	311
9.4.1. Предварительные сведения о дифференциальных формах (311). 9.4.2. Дополнительные уравнения с распределениями (315). 9.4.3. Симметрии и определение фундаментальных решений для волнового уравнения (317). 9.4.4. Вывод фундаментального решения (318). 9.4.5. Решение задачи Коши (320).	
9.5. Уравнения с переменными коэффициентами	320
Задачи к главе 9	321
Список литературы	322
Предметный указатель	326