

Оглавление

Предисловие к изданию на русском языке	10
К русскому читателю	14
Предисловие	16
Как пользоваться книгой	19
Что такое математика?	20
Глава I. Натуральные числа	25
Введение	25
§ 1. Операции над целыми числами	26
1. Законы арифметики. 2. Представление целых чисел с помощью письменных знаков (нумерация). 3. Арифметические действия в неде- сятичных системах счисления.	
§ 2. Бесконечность системы натуральных чисел. Математическая индукция	34
1. Принцип математической индукции. 2. Арифметическая прогрес- сия. 3. Геометрическая прогрессия. 4. Сумма n первых квадратов. *5. Одно важное неравенство. *6. Биномиальная теорема. 7. Даль- нейшие замечания по поводу метода математической индукции.	
Дополнение к главе I. Теория чисел	45
Введение	45
§ 1. Простые числа	45
1. Основные факты. 2. Распределение простых чисел. а. Формулы, дающие простые числа. б. Простые числа в арифметических прогрес- сиях. в. Теорема о распределении простых чисел. г. Две еще не ре- шенные задачи о простых числах.	
§ 2. Сравнения	57
1. Общие понятия. 2. Теорема Ферма. 3. Квадратические вычеты.	
§ 3. Пифагоровы числа и большая теорема Ферма	65
§ 4. Алгоритм Евклида	67
1. Общая теория. 2. Применение к основной теореме арифметики. 3. Функция Эйлера $\varphi(n)$. Еще раз о теореме Ферма. 4. Непрерывные дроби. Диофантовы уравнения.	
Глава II. Математическая числовая система	77
Введение	77
§ 1. Рациональные числа	77
1. Рациональные числа как средство измерения. 2. Возникновение на- добности в рациональных числах внутри самой математики. Принцип обобщения. 3. Геометрическое представление рациональных чисел.	
§ 2. Несоизмеримые отрезки. Иррациональные числа, пределы	83
1. Введение. 2. Десятичные дроби: конечные и бесконечные. 3. Преде- лы. Бесконечные геометрические прогрессии. 4. Рациональные числа	

и периодические десятичные дроби. 5. Общее определение иррациональных чисел посредством стягивающихся отрезков. *6. Иные методы определения иррациональных чисел. Дедекиндовы сечения.	99
§ 3. Замечания из области аналитической геометрии	104
1. Основной принцип. 2. Уравнения прямых и кривых линий.	
§ 4. Математический анализ бесконечного	116
1. Основные понятия. 2. Счетность множества рациональных чисел и несчетность континуума. 3. «Кардинальные числа» Кантора. 4. Косвенный метод доказательства. 5. Парадоксы бесконечного. 6. Основания математики.	
§ 5. Комплексные числа	130
1. Возникновение комплексных чисел. 2. Геометрическое представление комплексных чисел. 3. Формула Муавра и корни из единицы. *4. Основная теорема алгебры.	
§ 6. Алгебраические и трансцендентные числа	134
1. Определение и вопросы существования. **2. Теорема Лиувилля и конструирование трансцендентных чисел.	
Дополнение к главе II. Алгебра множеств	143
1. Общая теория. 2. Применение к математической логике. 3. Одно из применений к теории вероятностей.	
Глава III. Геометрические построения. Алгебра числовых полей	146
Введение	153
Часть 1. Доказательства невозможности и алгебра	161
§ 1. Основные геометрические построения	167
1. Построение полей и извлечение квадратных корней. 2. Правильные многоугольники. 3. Проблема Аполлония.	
§ 2. Числа, допускающие построение, и числовые поля	173
1. Общая теория. 2. Все числа, допускающие построение — алгебраические.	
§ 3. Неразрешимость трех классических проблем	167
1. Удвоение куба. 2. Одна теорема о кубических уравнениях. 3. Трисекция угла. 4. Правильный семиугольник. 5. Замечания по поводу квадратуры круга.	
Часть 2. Различные методы выполнения построений	167
§ 4. Геометрические преобразования. Инверсия	173
1. Общие замечания. 2. Свойства инверсии. 3. Геометрическое построение обратных точек. 4. Как разделить отрезок пополам и как найти центр данной окружности с помощью одного циркуля.	
§ 5. Построения с помощью других инструментов. Построения Маскерони с помощью одного циркуля	173
*1. Классическая конструкция, служащая для удвоения куба. 2. Построения с помощью одного циркуля. 3. Черчение с помощью различных механических приспособлений. Механические кривые. Циклоиды.	

*4. Шарнирные механизмы. Инверсоры Поселье и Гарта.	
§ 6. Еще об инверсии и ее применениях	185
1. Инвариантность углов. Семейства окружностей. 2. Применение к проблеме Аполлония. 3. Повторные отражения.	
Глава IV. Проективная геометрия. Аксиоматика. Неевклидовы геометрии	191
§ 1. Введение	191
1. Классификация геометрических свойств. Инвариантность при преобразованиях. 2. Проективные преобразования.	
§ 2. Основные понятия	194
1. Группа проективных преобразований. 2. Теорема Дезарга.	
§ 3. Двойное отношение	198
1. Определение и доказательство инвариантности. 2. Применение к полному четырехстороннику.	
§ 4. Параллельность и бесконечность	206
1. «Идеальные» бесконечно удаленные точки. 2. Идеальные элементы и проектирование. 3. Двойное отношение с бесконечно удаленными элементами.	
§ 5. Применения	212
1. Предварительные замечания. 2. Двумерное доказательство теоремы Дезарга. 3. Теорема Паскаля. 4. Теорема Бриансона. 5. Замечание по поводу двойственности.	
§ 6. Аналитическое представление	217
1. Вводные замечания. *2. Однородные координаты. Алгебраические основы двойственности.	
§ 7. Задачи на построение с помощью одной линейки	223
§ 8. Конические сечения и квадрики	224
1. Элементарная метрическая геометрия конических сечений. 2. Проективные свойства конических сечений. 3. Конические сечения как «линейчатые кривые». 4. Теоремы Паскаля и Бриансона для общего случая произвольных конических сечений. 5. Гиперболоид.	
§ 9. Аксиоматика и неевклидова геометрия	240
1. Аксиоматический метод. 2. Гиперболическая неевклидова геометрия. 3. Геометрия и реальность. 4. Модель Пуанкаре. 5. Эллиптическая, или риманова, геометрия.	
Приложение. Геометрия в пространствах более чем трех измерений	253
1. Введение. 2. Аналитический подход. *3. Геометрический, или комбинаторный, подход.	
Глава V. Топология	261
Введение	261
§ 1. Формула Эйлера для многогранников	262
§ 2. Топологические свойства фигур	267
1. Топологические свойства. 2. Свойства связности.	

§ 3. Другие примеры топологических теорем	270
1. Теорема Жордана о замкнутой кривой. 2. Проблема четырех красок. *3. Понятие размерности. 4. Теорема о неподвижной точке. 5. Узлы.	
§ 4. Топологическая классификация поверхностей	282
1. Род поверхности. *2. Эйлера характеристика поверхности. 3. Односторонние поверхности.	
Приложение.	290
*1. Проблема пяти красок. 2. Теорема Жордана для случая многоугольников. *3. Основная теорема алгебры.	
Глава VI. Функции и пределы	299
Введение	299
§ 1. Независимое переменное и функция	300
1. Определения и примеры. 2. Радианная мера углов. 3. График функции. Обратные функции. 4. Сложные функции. 5. Непрерывность. *6. Функции нескольких переменных. *7. Функции и преобразования.	
§ 2. Пределы	317
1. Предел последовательности a_n . 2. Монотонные последовательности. 3. Число Эйлера e . 4. Число π . *5. Непрерывные дроби.	
§ 3. Пределы при непрерывном приближении	330
1. Введение. Общие определения. 2. Замечания по поводу понятия предела. 3. Предел $\frac{\sin x}{x}$. 4. Пределы при $x \rightarrow \infty$.	
§ 4. Точное определение непрерывности	337
§ 5. Две основные теоремы о непрерывных функциях	339
1. Теорема Больцано. *2. Доказательство теоремы Больцано. 3. Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях. *4. Теорема о последовательностях. Компактные множества.	
§ 6. Некоторые применения теоремы Больцано	344
1. Геометрические применения. *2. Применение к одной механической проблеме.	
Дополнение к главе VI. Дальнейшие примеры на пределы и непрерывность	349
§ 1. Примеры пределов	349
1. Общие замечания. 2. Предел q^n . 3. Предел $\sqrt[n]{p}$. 4. Разрывные функции как предел непрерывных. *5. Пределы при итерации.	
§ 2. Пример, относящийся к непрерывности	355
Глава VII. Максимумы и минимумы	357
Введение	357
§ 1. Задачи из области элементарной геометрии	358
1. Треугольник наибольшей площади при двух заданных сторонах. 2. Теорема Герона. Экстремальное свойство световых лучей. 3. Применение к задачам о треугольниках. 4. Свойства касательных к	

эллипсу и гиперболе. Соответствующие экстремальные свойства.	
*5. Экстремальные расстояния точки от данной кривой.	
§ 2. Общий принцип, которому подчинены экстремальные задачи	366
1. Принцип. 2. Примеры.	
§ 3. Стационарные точки и дифференциальное исчисление	369
1. Экстремальные и стационарные точки. 2. Максимумы и минимумы функций нескольких переменных. Седловые точки. 3. Точки минимакса и топология. 4. Расстояние точки от поверхности.	
§ 4. Треугольник Шварца	375
1. Доказательство, предложенное Шварцем. 2. Другое доказательство. 3. Тупоугольные треугольники. 4. Треугольники, образованные световыми лучами. *5. Замечания, касающиеся задач на отражение и эргодическое движение.	
§ 5. Проблема Штейнера	382
1. Проблема и ее решение. 2. Анализ возникающих возможностей. 3. Дополнительная проблема. 4. Замечания и упражнения. 5. Обобщение: проблема уличной сети.	
§ 6. Экстремумы и неравенства	389
1. Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных величин. 2. Обобщение на случай n переменных. 3. Метод наименьших квадратов.	
§ 7. Существование экстремума. Принцип Дирихле	394
1. Общие замечания. 2. Примеры. 3. Экстремальные проблемы элементарного содержания. 4. Трудности, возникающие в более сложных случаях.	
§ 8. Изопериметрическая проблема	401
*§ 9. Экстремальные проблемы с граничными условиями. Связь между проблемой Штейнера и изопериметрической проблемой	404
§ 10. Вариационное исчисление	407
1. Введение. 2. Вариационное исчисление. Принцип Ферма в оптике. 3. Решение задачи о брахистохроне, принадлежащее Якобу Бернулли. 4. Геодезические линии на сфере. Минимаксы.	
§ 11. Экспериментальные решения задач на минимум. Опыты с мыльными пленками	413
1. Введение. 2. Опыты с мыльными пленками. 3. Новые опыты, относящиеся к проблеме Плато. 4. Экспериментальные решения других математических проблем.	
Глава VIII. Математический анализ	425
Введение	425
§ 1. Интеграл	426
1. Площадь как предел. 2. Интеграл. 3. Общие замечания о понятии интеграла. Общее определение. 4. Примеры интегрирования. Интегрирование функции x^n . 5. Правила «интегрального исчисления».	
§ 2. Производная	442
1. Производная как наклон. 2. Производная как предел. 3. Примеры.	

4. Производные от тригонометрических функций. *5. Дифференцируемость и непрерывность. 6. Производная и скорость. Вторая производная и ускорение. 7. Геометрический смысл второй производной. 8. Максимумы и минимумы.	
§ 3. Техника дифференцирования	455
§ 4. Обозначения Лейбница и «бесконечно малые»	461
§ 5. Основная теорема анализа	463
1. Основная теорема. 2. Первые применения. Интегрирование функций x' , $\cos x$, $\sin x$. Функция $\operatorname{arctg} x$. 3. Формула Лейбница для π .	
§ 6. Показательная (экспоненциальная) функция и логарифм	471
1. Определение и свойства логарифма. Эйлерово число e . 2. Показательная (экспоненциальная) функция. 3. Формулы дифференцирования функций e^x , a^x , x^a . 4. Явные выражения числа e и функций e^x и $\ln x$ в виде пределов. 5. Бесконечный ряд для логарифма. Вычисление логарифмов.	
§ 7. Дифференциальные уравнения	482
1. Определения. 2. Дифференциальное уравнение экспоненциальной функции. Радиоактивный распад. Закон роста. Сложные проценты. 3. Другие примеры. Простые колебания. 4. Закон движения Ньютона.	
Дополнение к главе VIII.	491
§ 1. Вопросы принципиального порядка	491
1. Дифференцируемость. 2. Интеграл. 3. Другие приложения понятия интеграла. Работа. Длина кривой.	
§ 2. Порядки возрастания	498
1. Показательная функция и степени переменного x . 2. Порядок возрастания функции $\ln(n!)$.	
§ 3. Бесконечные ряды и бесконечные произведения	501
1. Бесконечные ряды функций. 2. Формула Эйлера $\cos x + i \sin x = e^{ix}$. 3. Гармонический ряд и дзета-функция. Формула Эйлера, выражающая $\sin x$ в виде бесконечного произведения.	
*§4. Доказательство теоремы о простых числах на основе статистического метода	511
Приложение. Дополнительные замечания. Задачи и упражнения	517
Арифметика и алгебра	517
Аналитическая геометрия	519
Геометрические построения	525
Проективная и неевклидова геометрия	525
Топология	527
Функции, пределы, непрерывность	530
Максимумы и минимумы	531
Дифференциальное и интегральное исчисления	533
Техника интегрирования	535
Добавление 1. Вклейка «От издательства» в первое издание книги на русском языке	541

Добавление 2. О создании книги «Что такое математика?»	544
Рекомендуемая литература	551
Предметный указатель	557