
О г л а в л е н и е

Предисловие 3

Глава I. НЕФОРМАЛЬНОЕ (ИНТУИТИВНОЕ) ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБ АЛГОРИТМАХ 6

1.1. Алгоритмы в жизни и в математике 6

Алгоритмы в жизни. Алгоритмы в математике. Алгоритм Евклида.

1.2. Неформальное понятие алгоритма и необходимость его уточнения 9

Неформальное понятие алгоритма. Необходимость уточнения понятия алгоритма.

Глава II. МАШИНЫ ТЬЮРИНГА И ВЫЧИСЛИМЫЕ ПО ТЬЮРИНГУ ФУНКЦИИ 14

2.1. Понятие машины Тьюринга и применение машин Тьюринга к словам 14

Определение машины Тьюринга. Применение машин Тьюринга к словам. Конструирование машин Тьюринга.

2.2. Примеры машин Тьюринга 22

Прибавление единицы. Перенос нуля. Левый сдвиг. Правый сдвиг. Транспозиция. Удвоение.

2.3. Композиция машин Тьюринга 26

Понятие композиции машин Тьюринга. Применение композиции машин Тьюринга для их конструирования. Циклический сдвиг. Копирование.

2.4. Вычислимые по Тьюрингу функции 28

Алгоритмы, функции и машины Тьюринга. Вычислимость функций на машине Тьюринга. Правильная вычислимость функций на

машине Тьюринга. Нуль-функция. Функции-проекторы. Вычисление сложных функций на машинах Тьюринга. Тезис Тьюринга (основная гипотеза теории алгоритмов). Машины Тьюринга и современные электронно-вычислительные машины.

Глава III. РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ 41

3.1. Начало теории рекурсивных функций 41

Происхождение рекурсивных функций. Простейшие функции. Оператор суперпозиции. Оператор примитивной рекурсии. Примеры других схем рекурсии (не примитивных). Понятие примитивно рекурсивной функции. Оператор минимизации. Понятие частично рекурсивной и общерекурсивной функции. Тезис Чёрча (основная гипотеза теории рекурсивных функций).

3.2. Примитивно рекурсивные функции 48

Примеры примитивно рекурсивных функций. Примитивная рекурсивность булевых функций. Операторы суммирования и мультиплицирования (умножения).

3.3. Примитивно рекурсивные предикаты 56

Понятие примитивно рекурсивного предиката. Примеры примитивно рекурсивных предикатов. Логические операции с примитивно рекурсивными предикатами. Ограниченные кванторы общности и существования. Примеры примитивно рекурсивных предикатов. Оператор условного перехода. (Кусочное задание функций). Оператор ограниченной минимизации. (Ограниченный μ -оператор). Дальнейшие примеры примитивно рекурсивных функций.

3.4. Примитивно рекурсивные функции и функции, вычислимые по Тьюрингу 67

Вычислимость по Тьюрингу примитивно рекурсивных функций. Функции Аккермана.

3.5. Частично рекурсивные функции и функции, вычислимые по Тьюрингу 73

Оператор минимизации. Общерекурсивные и частично рекурсивные функции. Вычислимость по Тьюрингу частично рекурсивных функций. Частичная рекурсивность функций вычислимых по Тьюрингу.

Глава IV. НОРМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МАРКОВА 84

4.1. Марковские подстановки, нормальные алгоритмы и нормально вычислимые функции 84

Марковские подстановки. Нормальные алгоритмы и их применение к словам. Нормально вычислимые функции. Принцип нормализации Маркова.

4.2. Рекурсивные функции и нормально вычислимые функции 97

Совпадение класса всех частично рекурсивных функций с классом всех нормально вычислимых функций. Совпадение класса всех нормально вычислимых функций с классом всех функций, вычислимых по Тьюрингу. Эквивалентность различных теорий алгоритмов.

Глава V. ОБЩИЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ 102

5.1. Нумерации алгоритмов и вычислимых функций 102

Предварительные соображения. Вычислимые функции. Разрешимые предикаты и разрешимые алгоритмические проблемы. Нумерация (перечисление) алгоритмов. Нумерация машин Тьюринга. Нумерация вычислимых функций. Диагональный метод в теории алгоритмов.

5.2. Теорема о параметризации и универсальные функ- ции и алгоритмы 114

Теорема о параметризации (s - m - n -теорема Клини). Универсальные функции и алгоритмы. Главные универсальные функции (главные нумерации). Эффективные операции над вычислимыми функциями.

5.3. Теорема о неподвижной точке и её применения 123

Теорема о неподвижной точке. Следствия из теоремы о неподвижной точке. Неформальные интерпретации теоремы о неподвижной точке. Пример применения теоремы о неподвижной точке: существование алгоритма, печатающего свой собственный текст.

Глава VI. РАЗРЕШИМОСТЬ И ПЕРЕЧИСЛИМОСТЬ МНОЖЕСТВ 128

Происхождение проблемы.

6.1. Разрешимые множества и их свойства 129

Понятие разрешимого множества и примеры. Свойства разрешимых множеств.

6.2. Перечислимые множества и их свойства 131

Понятие перечислимого множества и примеры. Свойства перечислимых множеств.

6.3. Взаимоотношения между разрешимыми и перечислимыми множествами 132

Разрешимые и перечислимые множества. Канторовская нумерация упорядоченных пар натуральных чисел. Существование перечислимого, но не разрешимого множества. Разрешимость и перечислимость: итог.

6.4. Связь разрешимых и перечислимых множеств с вычислимыми функциями 139

Перечислимые множества и вычислимые функции. Ещё один пример перечислимого, но не разрешимого множества. Примеры множеств, не являющихся перечислимыми. Ещё одна характеристика перечислимых множеств. Перечислимые множества как проекции разрешимых бинарных отношений. График вычислимой функции.

Глава VII. АЛГОРИТМИЧЕСКИ НЕРАЗРЕШИМЫЕ МАССОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ 150

7.1. Алгоритмически неразрешимые проблемы, связанные с машинами Тьюринга 151

Существование не вычислимых по Тьюрингу функций. Пример не вычислимой по Тьюрингу функции. Проблема распознавания самоприменимости. Проблема распознавания применимости.

7.2. Алгоритмически неразрешимые проблемы в общей теории алгоритмов 154

Проблема распознавания самоприменимости алгоритмов. Проблема распознавания применимости (или остановки) алгоритмов. Проблема распознавания нулевых функций. Проблема распознавания равенства двух вычислимых функций. Проблема распознавания общерекурсивных (т.е. всюду определённых вычислимых) функций. Не всякая частичная вычислимая функция может быть доопределена до всюду определённой вычислимой функции. Существование

перечислимого, но не разрешимого множества. Проблема распознавания нетривиальных свойств вычислимых функций. Дальнейшие примеры алгоритмически неразрешимых массовых проблем. О значении алгоритмически неразрешимых массовых проблем для теории алгоритмов и практики программирования.

7.3. Частично разрешимые предикаты и частично разрешимые алгоритмические проблемы 170

Частично разрешимые предикаты. Связь частично разрешимых предикатов с разрешимыми предикатами. Признак вычислимости частичной функции.

Глава VIII. СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ И МАССОВЫХ ПРОБЛЕМ 180

8.1. Как измерять сложность вычислительных задач и массовых проблем 181

Единичные вычислительные задачи и массовые проблемы. Вычислительная сложность единичной задачи. Сложность массовых проблем.

8.2. Сравнение и классификация массовых проблем и алгоритмов по их сложности 194

Концепция сравнения массовых проблем и алгоритмов по их сложности. Сложностные классы массовых проблем.

8.3. Основы теории NP-полных массовых проблем 201

Алгоритмическая сводимость массовых проблем. Проблемы распознавания. Формальные языки и грамматики. Проблемы распознавания и формальные языки. Детерминированные алгоритмы и классы P. Недетерминированные алгоритмы и класс NP. Взаимоотношения между классами P и NP. Полиномиальная сводимость формальных языков массовых проблем распознавания. Класс NP-полных языков и NP-полных массовых проблем распознавания. NP-полнота проблемы выполнимости для формул логики высказываний. Примеры NP-полных массовых проблем. NP-полнота проблемы 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ. NP-полные проблемы и труднорешаемые проблемы.

Глава IX. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ 252

9.1. Теоремы К.Гёделя и А.Тарского о формальной арифметике 252

Формальные аксиоматические теории и натуральные числа. Формальная арифметика и её свойства. Доказательство теоремы Гёделя о неполноте. Ещё один взгляд на теорему Гёделя о неполноте. Вторая теорема К.Гёделя. Теорема А.Тарского. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики с позиций программиста.

9.2. Неразрешимость формализованного исчисления предикатов 283

Идея доказательства. Построение для данной машины Тьюринга множества формул Δ и формулы H .

Глава X. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ 287

10.1. Десятая проблема Д.Гильберта 287

История проблемы. Диофантовы множества и их связь с пересчитываемыми множествами. Решение 10-ой проблемы Гильберта. Следствия из теоремы Ю.В.Матиясевича. 10-ая проблема Гильберта с точки зрения теории предикатов. Две модификации 10-ой проблемы Гильберта.

10.2. Проблема тождества слов и другие математические проблемы 296

Истоки проблемы тождества слов. Проблема слов в теории полугрупп. Алгоритмические проблемы слов в теории групп. Проблема нахождения нулей многочлена. Алгоритмические проблемы в других разделах математики.

10.3. О дальнейших направлениях изучения алгоритмических проблем логики и математики 303

Разрешимые математические теории и программа Гильберта. Алгоритмическая сложность разрешимых математических теорий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 306