

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения	13
----------------------------	----

Глава 1

СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА КООРДИНАТ	17
1.1. Введение	17
1.2. Система декартовых прямоугольных координат	18
1.3. Ортогональные преобразования. Направляющие косинусы	20
1.3.1. Связь подвижной и неподвижной систем координат. Коэффициенты линейного преобразования. Суммирование по правилу Эйнштейна	20
1.3.2. Направляющие косинусы	21
1.3.3. Матричное представление преобразования координат	22
1.4. Параллельный перенос и вращение декартовой системы координат	24
1.5. Углы Эйлера	25
1.6. Системы криволинейных координат	28
1.6.1. Определение ортогональных криволинейных координат	28
1.6.2. Коэффициенты Ламе	29
1.6.3. Элемент объема в ортогональной криволинейной системе координат	31
1.7. Важнейшие системы ортогональных криволинейных координат в пространстве	31
1.7.1. Система цилиндрических координат	32
1.7.2. Система сферических координат	33
1.7.3. Система параболических цилиндрических координат	34
1.7.4. Система параболических координат вращения (параболоидальные координаты)	35
1.7.5. Система эллиптических цилиндрических координат	36
1.7.6. Система вытянутых эллипсоидальных координат (вращения) (вытянутые сфероидальные координаты)	38
1.7.7. Система сплюснутых эллипсоидальных координат (вращения) (сплюснутые сфероидальные координаты)	39



1.7.8. Система биполярных (бицилиндрических) координат	40
1.7.9. Система тороидальных координат	42
1.7.10. Система бисферических координат	42
1.8. Преобразования векторов в координатных системах	43
1.8.1. Преобразование векторов при переходе из прямоугольной в цилиндрическую систему координат (и обратно)	44
1.8.2. Преобразование векторов при переходе из цилиндрической системы координат в сферическую (и обратно)	47
1.8.3. Преобразование векторов при переходе из прямоугольной в сферическую систему координат (и обратно)	48

Глава 2

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Векторная алгебра	51
2.1.1. Основные определения. Скалярные, векторные и тензорные величины	51
2.1.1.1. Скалярные величины	52
2.1.1.2. Векторные величины	52
2.1.1.3. Тензорные величины	55
2.1.2. Операции над векторами	56
2.1.2.1. Произведение вектора на скаляр	56
2.1.2.2. Составляющие вектора	56
2.1.2.3. Радиус-вектор	57
2.1.2.4. Сложение и вычитание векторов	57
2.1.2.5. Скалярное произведение	58
2.1.2.6. Векторное произведение	60
2.1.2.7. Многokратные произведения векторов	62
2.1.2.7.1. Произведения трех векторов	62
2.1.2.7.2. Векторно-скалярное произведение векторов	62
2.1.2.7.3. Двойное векторное произведение	64
2.1.2.7.4. Произведения многих векторов	65
2.2. Векторный анализ. Теория поля	66
2.2.1. Переменные векторы, зависящие от скалярного аргумента	66
2.2.1.1. Переменный вектор. Годограф векторной функции	66
2.2.1.2. Дифференцирование векторной функции по скалярному аргументу	67
2.2.1.3. Интегрирование векторных функций от скалярного аргумента	69
2.2.1.3.1. Дифференциал векторной функции	69
2.2.1.3.2. Неопределенный и определенный интегралы от векторной функции	70
2.2.1.4. Площадь как вектор	71
2.2.2. Скалярные и векторные поля	74
2.2.3. Поверхности уровня. Градиент скалярного поля	74



2.2.3.1. Поверхности уровня. Нормальные линии	74
2.2.3.2. Определение градиента. Потенциальный вектор	76
2.2.3.3. Связь дифференциала скалярной функции с градиентом	78
2.2.4. Основные свойства градиента	80
2.2.5. Векторное поле. Векторные линии	81
2.2.6. Поверхностные интегралы. Поток векторного поля	83
2.2.6.1. Скалярный и векторный потоки скалярного и векторного поля	83
2.2.6.2. Поток вектора через поверхность	85
2.2.6.3. Поверхностные интегралы по замкнутой поверхности	87
2.2.7. Дивергенция векторного поля	88
2.2.7.1. Определение дивергенции вектора. Истоки и стоки поля	88
2.2.7.2. Основные свойства дивергенции	89
2.2.8. Теорема Гаусса—Остроградского	91
2.2.9. Линейный интеграл вектора вдоль кривой. Циркуляция вектора	94
2.2.9.1. Интеграл вектора вдоль кривой L	94
2.2.9.2. Циркуляция вектора по кривой L	96
2.2.9.3. Линейный интеграл от потенциального вектора	96
2.2.9.4. Вычисление криволинейного интеграла по замкнутой кривой	97
2.2.10. Ротор векторного поля	99
2.2.11. Безвихревые векторные поля	102
2.2.12. О соленоидальности поля вихрей	104
2.2.13. Свойства вихря вектора	104
2.2.14. Теорема Стокса	105
2.2.15. Производная вектора по направлению	108
2.2.16. Отыскание векторного поля по его ротору и дивергенции	110
2.2.16.1. Скалярный и векторный потенциалы векторного поля	110
2.2.16.2. О теореме разложения Гельмгольца	111
2.2.16.3. Формулы скалярного и векторного потенциалов	111
2.2.17. Описание векторных операций с помощью оператора Гамильтона ∇	112
2.2.17.1. Определение оператора ∇ и выражение через него основных векторных функций	112
2.2.17.2. Символический метод вычислений	115
2.2.17.3. Основные правила действия с оператором ∇	118
2.2.18. Оператор Лапласа	119
2.2.19. Интегральные соотношения	121
2.2.19.1. Интегральные теоремы (формулы) Грина	121
2.2.19.2. Формулы, связывающие тройной интеграл с двойным	122
2.2.20. Векторные операции в криволинейных координатах	124
2.2.20.1. О криволинейных координатах	124



2.2.20.2. Градиент в ортогональных криволинейных координатах	126
2.2.20.3. Дивергенция в ортогональных криволинейных координатах	128
2.2.20.4. Вихрь в ортогональных криволинейных координатах	129
2.2.20.5. Оператор Лапласа в ортогональных криволинейных координатах	131
2.2.21. Векторные операции в цилиндрических и сферических координатах	132
2.2.21.1. Цилиндрические координаты	132
2.2.21.2. Сферические координаты	133
2.2.22. Центральные и осевые скалярные поля	135
2.3. Векторное исчисление в теории электромагнитного поля	137
2.3.1. Характеристики электромагнитного поля и среды	137
2.3.1.1. Основные характеристики электромагнитного поля	137
2.3.1.2. Характеристики и виды сред	139
2.3.2. Интегральные уравнения электромагнитного поля	143
2.3.2.1. Закон взаимодействия электрических зарядов (закон Кулона)	143
2.3.2.2. Закон о возбуждении магнитного поля (закон Ампера)	144
2.3.2.3. Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея)	144
2.3.2.4. Обобщение экспериментальных законов Максвеллом	145
2.3.3. Дифференциальные уравнения электромагнитного поля	148
2.3.4. Уравнение непрерывности (закон сохранения заряда)	149
2.4. Основные соотношения и формулы векторного анализа	151
2.4.1. Формулы векторной алгебры	151
2.4.2. Производные по скалярному аргументу	152
2.4.3. Основные векторные операции в декартовой системе координат	152
2.4.4. Векторные формулы в символике Гамильтона	153
2.4.5. Интегральные соотношения	155
2.4.6. Ортогональные криволинейные координаты u_1, u_2, u_3	157
2.4.7. Основные векторные операции в криволинейных координатах	158
2.4.8. Основные векторные операции в цилиндрических координатах	158
2.4.9. Основные векторные операции в сферических координатах	159



Глава 3

МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	160
3.1. Основы теории матриц	161
3.1.1. Основные представления и операции матричной алгебры	161
3.1.1.1. О символике и некоторых понятиях теории множеств	161
3.1.1.1.1. Понятие множества	161
3.1.1.1.2. Отображения и виды множеств	161
3.1.1.1.3. Свойства операций для элементов множеств в линейном пространстве	162
3.1.1.2. Линейные отображения и матрицы	164
3.1.1.3. Матричные определения	165
3.1.1.4. Основные типы матриц	166
3.1.1.4.1. Диагональная матрица	166
3.1.1.4.2. Симметричная, кососимметричная и косая матрицы	167
3.1.1.4.3. Ленточная матрица	168
3.1.1.4.4. Транспонированная матрица	168
3.1.1.5. Определители, подматрицы, миноры и алгебраические дополнения матрицы	169
3.1.1.5.1. Определители	169
3.1.1.5.2. Подматрицы	172
3.1.1.5.3. Миноры и алгебраические дополнения	173
3.1.1.5.4. Ранг матрицы	174
3.1.1.6. Теорема Лапласа	174
3.1.1.7. Транспонирование матриц	175
3.1.1.8. Сложение и вычитание матриц	175
3.1.1.9. Умножение матриц	176
3.1.1.9.1. Умножение на скаляр	176
3.1.1.9.2. Умножение матриц	177
3.1.1.9.3. Произведение квадратных матриц	178
3.1.1.9.4. Умножение любой строки (или столбца) матрицы	180
3.1.1.9.5. Умножение матрицы-столбца слева и справа на матрицу-строку	180
3.1.1.9.6. Умножение квадратной матрицы на матрицу-строку	181
3.1.1.9.7. О свойствах матричных произведений	182
3.1.1.10. Нулевая, единичная и скалярная матрицы	183
3.1.1.11. Возведение матрицы в степень	185
3.1.1.12. Обращение матриц	186
3.1.1.13. Присоединенная и обратная матрицы	187
3.1.1.14. Вычисление обратной матрицы	188
3.1.1.15. Обращение и транспонирование матриц	189
3.1.1.16. Правила транспонирования и обращения произведения матриц	190



3.1.1.17. Разбиение матрицы на подматрицы	190
3.1.1.18. Ранги и матричные операции	192
3.1.1.19. Об отличии операций с матрицами и определителями	193
3.1.1.20. Матричные нормы	194
3.1.1.21. Элементарные преобразования в матрицах	196
3.1.2. Матрицы комплексного пространства	197
3.1.2.1. Матрицы с комплексными элементами	198
3.1.2.1.1. Симметрические матрицы	198
3.1.2.1.2. Комплексно- и эрмитово-сопряженная матрицы	199
3.1.2.1.3. Эрмитовы матрицы	200
3.1.2.1.4. Унитарная, ортогональная и нормальная матрицы	201
3.1.2.2. Модуль и скалярное произведение в комплексном пространстве	202
3.1.2.3. Обращение комплексной матрицы	203
3.1.3. Матрицы преобразований. Ступенчатые, треугольные и почти треугольные матрицы	205
3.1.3.1. Матрицы перестановки и модификации строк. Элементарные треугольные матрицы	206
3.1.3.1.1. Матрица перестановки	206
3.1.3.1.2. Матрица модификации строк	207
3.1.3.1.3. Элементарные треугольные матрицы	208
3.1.3.2. Матрицы элементарного вращения и отражения	209
3.1.3.2.1. Матрица элементарного вращения	209
3.1.3.2.2. Матрица отражения	210
3.1.3.3. Матрицы преобразования системы координат	211
3.1.3.3.1. Общие сведения	211
3.1.3.3.2. Ортогональное преобразование	212
3.1.3.3.3. Преобразования (повороты) трехмерной ортогональной системы координат	213
3.1.3.4. Ступенчатые матрицы. Приведение к ступенчатой форме	214
3.1.3.4.1. Верхняя и нижняя ступенчатая матрицы	214
3.1.3.4.2. Приведение к ступенчатой форме	214
3.1.3.4.3. Приведение к диагональной форме. Эквивалентные матрицы	215
3.1.3.4.4. Алгоритм приведения к ступенчатой форме	216
3.1.3.5. Треугольные матрицы	218
3.1.3.5.1. Верхняя и нижняя треугольные матрицы	218
3.1.3.5.2. Разложение квадратной матрицы (LU-разложение)	219
3.1.3.5.3. Обращение треугольной матрицы	220
3.1.3.6. Хессенберговы (почти треугольные) матрицы	222



3.1.4. Блочные матрицы	223
3.1.4.1. Определение блочных, или клеточных, матриц	223
3.1.4.2. Умножение и сложение блочных матриц	225
3.1.4.3. Формула Фробениуса	226
3.1.4.4. Обращение блочной матрицы	226
3.1.4.5. Определитель блочно-треугольной матрицы	227
3.1.5. Собственные векторы и собственные значения матриц	227
3.1.5.1. Кольцо матриц. Примеры линейных пространств	227
3.1.5.1.1. Аксиомы кольца	228
3.1.5.1.2. Примеры линейных пространств	229
3.1.5.2. Линейные комбинации. Теорема Кронекера—Капелли	229
3.1.5.2.1. Линейная оболочка векторов	229
3.1.5.2.2. Теорема Кронекера—Капелли	231
3.1.5.2.3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов	231
3.1.5.3. Формулы Виета	232
3.1.5.4. Характеристическое уравнение и собственные значения матрицы	233
3.1.5.4.1. Собственный вектор. Собственные значения матрицы	233
3.1.5.4.2. Характеристическая матрица, уравнение, числа	234
3.1.5.4.3. Инвариантность характеристического уравнения	236
3.1.5.5. Собственные векторы	236
3.1.5.6. След матрицы	238
3.1.5.7. Теорема Гамильтона—Кэли	239
3.1.5.7.1. Формулировка теоремы	239
3.1.5.7.2. Вычисление обратной матрицы	240
3.1.6. Операции над матрицами	242
3.1.6.1. Дифференцирование матриц	242
3.1.6.2. Интегрирование матриц	243
3.1.6.3. Частное дифференцирование матриц	243
3.1.6.3.1. Операция частного дифференцирования матриц	243
3.1.6.3.2. Стандартные соотношения при использовании частных производных от матриц	245
3.1.6.3.3. Дифференцирование обратной матрицы (по параметру x)	246
3.1.6.4. Многочлены от матриц	246
3.1.6.5. Функции матриц	247
3.1.6.6. Представление матричной функции с помощью многочлена	248
3.1.6.7. Теорема Сильвестра	250
3.1.6.8. Решение алгебраических уравнений с помощью матриц	251



3.1.6.9. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с использованием матричных представлений	252
3.1.6.9.1. Матрициант	252
3.1.6.9.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	254
3.1.7. Кронекеровские операции с матрицами	256
3.1.7.1. Кронекеровское (прямое) произведение	256
3.1.7.1.1. Определение	256
3.1.7.1.2. Основные свойства кронекеровских произведений	257
3.1.7.2. Кронекеровские степени	259
3.1.7.3. Кронекеровская (прямая) сумма матриц	259
3.1.7.4. Кронекеровские и поэтакжно-кронекеровские матрицы. Вертикальная сумма матриц	260
3.1.7.4.1. Основные определения	260
3.1.7.4.2. Используемые обозначения и элементарные матрицы	261
3.1.7.5. Некоторые теоремы	263
3.1.8. Некоторые виды матриц, используемые в технике	266
3.1.8.1. Матрица Фурье	266
3.1.8.2. Матрица Якоби и якобиан	267
3.1.8.3. Матрица Гесса (гессиан)	269
3.1.8.4. Матрица Грама	270
3.2. Системы линейных алгебраических уравнений и матрицы	271
3.2.1. О методах решения систем линейных алгебраических уравнений	271
3.2.2. Правило Крамера для решения системы уравнений	272
3.2.3. Метод исключения Гаусса	274
3.2.3.1. Идея метода Гаусса	274
3.2.3.2. Основные операции метода Гаусса	275
3.2.3.3. Алгоритм метода Гаусса	276
3.2.4. Метод Гаусса и LU -разложение	279
3.2.4.1. LU -разложение	279
3.2.4.2. Условие существования LU -разложения	280
3.2.5. Обобщенный алгоритм Гаусса (обращение матриц путем подразделения на блоки)	281
3.2.6. Разложения матриц	285
3.2.6.1. QR -разложения матрицы	286
3.2.6.2. QL -разложение матрицы	287
3.2.6.3. Сингулярное (SVD) разложение матрицы	288
3.2.7. Об алгоритмах умножения матриц	289
3.2.7.1. Метод Винограда	290
3.2.7.2. Метод Штрассена	290



Глава 4

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	293
4.1. Предварительные сведения	293
4.1.1. Задачи тензорного анализа. Инвариантность	293
4.1.2. Индексные обозначения. Соглашение о суммировании	295
4.1.2.1. Система обозначений	295
4.1.2.2. Правила суммирования и расположения индексов	297
4.1.3. Аффинное векторное и метрическое пространства	299
4.1.4. Ортонормальный базис евклидова пространства.	
Взаимные базисы векторов	300
4.1.4.1. Понятие базиса для пространства	300
4.1.4.2. Взаимные базисы	301
4.1.5. Ковариантные и контравариантные составляющие векторов	303
4.1.6. Преобразование координат. Ковариантные и контравариантные векторы	304
4.1.6.1. Общий случай преобразования координат	304
4.1.6.2. Ковариантные и контравариантные векторы	307
4.2. Тензорная алгебра	309
4.2.1. Тензоры в прямоугольной системе координат	309
4.2.1.1. Тензоры нулевого, первого и второго рангов	309
4.2.1.2. Свойства тензоров второго ранга	312
4.2.1.3. Тензоры высших рангов	313
4.2.2. Тензоры в r -мерном пространстве	314
4.2.3. Тензоры в системах обобщенных координат	315
4.2.3.1. Ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты тензоров	315
4.2.3.2. Операция поднятия и опускания индексов	317
4.2.3.3. Ковариантные, контравариантные и смешанные тензоры	318
4.2.4. Симметрия и антисимметрия тензоров	319
4.2.4.1. Симметричные и антисимметричные тензоры второго ранга	319
4.2.4.2. Симметричные и антисимметричные тензоры по паре индексов	319
4.2.4.3. Инвариантность свойств симметрии и антисимметрии тензора	320
4.2.4.4. Матрицы симметричного и антисимметричного тензора второго ранга	320
4.2.4.5. Единичный тензор Кронекера	321
4.2.4.6. Абсолютно симметричные и антисимметричные тензоры	321
4.2.5. Об инвариантности тензорных уравнений	322
4.2.6. Действия над тензорами	322
4.2.6.1. Сложение тензоров	323
4.2.6.2. Умножение тензоров	324
4.2.6.3. Свертывание тензоров	325



4.2.6.4. Скалярное (внутреннее) произведение тензоров	327
4.2.6.5. Перестановка индексов, симметрирование и альтернирование	328
4.2.7. След тензора	331
4.2.8. Антисимметричный единичный тензор	332
4.3. Тензорный анализ	334
4.3.1. Тензорное поле	334
4.3.1.1. Тензор-функция скалярного аргумента	334
4.3.1.2. Тензорное поле	335
4.3.2. Поток, дивергенция и производная по направлению тензорного поля	336
4.3.2.1. Поток тензорного поля	336
4.3.2.2. Дивергенция тензорного поля (расхождение тензора)	337
4.3.2.3. Дифференцирование тензорного поля по направлению	339
4.3.3. Фундаментальные тензоры и символы Кристоффеля	339
4.3.3.1. Фундаментальные тензоры	339
4.3.3.2. Символы Кристоффеля	341
4.3.3.3. Частные производные фундаментального тензора	342
4.3.3.4. Символы Кристоффеля для ортогональных координат	343
4.3.4. Ковариантное дифференцирование тензоров	345
4.3.4.1. Ковариантное дифференцирование векторов	345
4.3.4.2. Ковариантная производная тензоров	348
4.3.4.3. Теорема Риччи	349
4.4. Тензоры в физике и радиоэлектронике	350
4.4.1. Тензор преобразования Лоренца	350
4.4.1.1. Преобразования Лоренца	350
4.4.1.2. Представление матриц преобразования в тензорном виде	352
4.4.2. Четырехмерные градиент, дивергенция и ротор. Тензорная форма уравнений Максвелла	354
4.4.2.1. Основные четырехмерные операции	354
4.4.2.2. Представление уравнений Максвелла в тензорном виде	355
4.4.3. Тензоры в кристаллофизике	356
4.4.3.1. Введение	356
4.4.3.2. Диэлектрические свойства кристалла	357
4.4.3.3. Закон Ома в кристалле	358
4.4.3.4. Пьезоэлектричество	359
4.4.4. Тензоры магнитной восприимчивости и проницаемости при описании гиромангнитных сред	362
Список использованной литературы	366