

Предисловие	7
-------------------	---

Раздел 1

ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1.1. Натуральные и целые числа	11
Понятия натурального и целого числа. Арифметические операции над натуральными и целыми числами и их свойства. Делимость нацело. Основные законы арифметики (11). Представление натурального числа в десятичной системе счисления и в системах счисления с произвольным основанием (16). Признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25 (19). Простые и составные числа. Основная теорема арифметики (22). Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, алгоритмы их нахождения и свойства (23). Деление с остатком (26). Сравнимость по модулю (26). Некоторые приёмы и методы, используемые при решении задач с целочисленными величинами: разложение целого числа в сумму по степеням основания системы счисления (28); метод анализа делимости нацело, использование признаков делимости (30); метод анализа остатков (35); метод анализа последней цифры числа (40); задачи на простые и составные числа (42); задачи на НОД и НОК (45); метод замены переменных (48); метод оценок (50); использование различных алгебраических преобразований, в том числе формул сокращённого умножения, приёма выделения полных квадратов (52); рассмотрение уравнения относительно некоторой величины (55); уравнения вида $A \cdot B = n$, где A, B – целочисленные выражения, n – целое число (57); задачи, приводящие к ситуации, когда дробь должна принимать целочисленные значения (58); другие приёмы и методы (60).	
1.2. Рациональные, иррациональные и действительные числа	61
Понятие арифметической дроби. Классификация дробей (61). Рациональные числа. Правила перевода рационального числа из обыкновенной дроби в периодическую и обратно (64). Сравнение рациональных чисел. Арифметические операции над рациональными числами (67). Решение уравнений в рациональных числах (70). Иррациональные и действительные числа (72). Сравнение действительных чисел. Арифметические операции над действительными числами и их свойства (77). Алгебраические и трансцендентные числа (85). Целая, дробная части действительного числа и их свойства (86).	
1.3. Степень действительного числа	94
Степени с натуральными и целыми показателями и их свойства (94). Арифметические и алгебраические корни n-й степени (96). Степени с рациональными показателями (99). Степени с иррациональными показателями (103).	

Раздел 2

ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ. ИЗВЕСТНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

- 2.1. Числовые равенства и неравенства.** 105
Числовые равенства и их свойства (107). Пропорции, их свойства (108). Пропорциональные отрезки. «Золотое сечение» (110). Числовые неравенства и их свойства (112).
- 2.2. Формулы сокращённого умножения.** 120
Основные и некоторые дополнительные формулы сокращённого умножения (120). Понятие n -факториала. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля (121).
- 2.3. Некоторые известные алгебраические неравенства.** 126
Неравенство о сумме двух взаимно обратных чисел (126). Наиболее известные средние величины и соотношения между ними (127). Неравенство Коши (130). Неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим (132). Неравенства Бернулли (133). Неравенство Коши—Буняковского (135). Неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным (136). Задачи на доказательство различных алгебраических неравенств (137).

Раздел 3

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

- 3.1. Уравнения, тождества, неравенства: определения и классификация** 141
- 3.2. Равносильность и следствие.** 145
Определение равносильности и следствия (145). Примеры равносильных преобразований (146). Примеры неравносильных преобразований (149).
- 3.3. Алгебраические уравнения и неравенства.** 153
- 3.3.1. Целые рациональные алгебраические уравнения и неравенства.** 153
- Линейные уравнения и неравенства* 153
- Квадратные уравнения и неравенства* 157
Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители (157). Теорема Виета. Обратная теорема. Теорема об определении знаков корней квадратного уравнения по его коэффициентам (161). Квадратные неравенства (166). Расположение корней квадратного трёхчлена относительно одной-двух заданных точек («метод парабол») (169).
- Алгебраические уравнения и неравенства степени выше второй.* 173
Теоремы о свойствах алгебраических многочленов: о разложении многочлена произвольной степени на произведение линейных и квадратичных множителей (173); о наличии у многочлена нечётной степени хотя бы одного действительного корня (174); основная теорема алгебры (174); об обращении в нуль многочлена, принимающего на концах отрезка значения разных знаков (174); о тождественном равенстве двух многочленов (174); о тождественном равенстве многочленов степени не выше n , если их значения совпадают в $n+1$ различных точках (174); о делении многочлена на многочлен с остатком (175);

теорема Безу (176); о рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами (176); теорема Виета в общем случае (177).

Методы решения целых алгебраических уравнений. 179

Разложение на множители (179); подбор корня с последующим понижением степени уравнения (180); метод поиска рациональных корней у многочленов с целыми коэффициентами (181); метод неопределённых коэффициентов (182); метод умножения на функцию (184); двучленные, трёхчленные и биквадратные уравнения (185); однородные уравнения (186); симметрические и кососимметрические уравнения (190); возвратные уравнения (192); уравнения вида $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$ (194); уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = A$, $(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = Ax^2$ (195); уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = Ax^2$ (197); $a(cx^2 + p_1x + q)^2 + b(cx^2 + p_2x + q)^2 = Ax^2$ (198); тригонометрические подстановки (198); частичная замена переменной и сведение к системе (199); графический подход (201).

3.3.2. Рациональные алгебраические уравнения и неравенства. 203

Общий метод решения дробных неравенств (205). Метод интервалов для решения неравенств (208). Метод замены множителей на множители равных знаков (212). Рациональные неравенства, решаемые на отдельных промежутках (216).

3.3.3. Иррациональные алгебраические уравнения и неравенства. 217

Метод возведения в степень (218). Стандартные задачи и схемы их решения: $\sqrt{f(x)} = g(x)$, $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$, $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)} \leq \sqrt[n]{g(x)}$ (223). Метод домножения на сопряжённое выражение (228). Замена переменных: рационализирующие подстановки (232). Решение задачи на отдельных промежутках ОДЗ (241).

3.3.4. Задачи с модулем. 242

Понятие модуля действительного числа, его график и свойства (242).

Методы решения задач с модулями. 245

Специальные методы. Раскрытие модулей по определению (245). Метод интервалов (249). Метод областей – обобщение метода интервалов (254). Раскрытие модуля, используя его геометрический смысл (259). Раскрытие модулей на ОДЗ (260). Умножение на сопряжённое выражение (261). Замена в неравенствах множителей вида $|a| - |b|$,

$\sqrt{a} - |b|$ множителями эквивалентного знака $a^2 - b^2$, $a - b^2$ (262). Задачи, содержащие «скрытый» модуль (264). Использование свойств модуля (266). Специальные схемы решения типовых задач (270):

$$|f(x)| = A, |f(x)| \leq A, |f(x)| \geq A, |f(x)| = g(x), |f(x)| \geq g(x), \\ |f(x)| \leq g(x), |f(x)| = |g(x)|, |f(x)| \leq |g(x)|, |f(x)| \neq |g(x)|.$$

Универсальные методы. Возведение в степень (278). Метод замены неизвестных (280). Разложение на множители (282). Графический подход (метод координат) (283). Метод оценок (292). Метод «от частного к общему» (294).

3.3.5. Задачи, использующие понятия наименьшего и наибольшего из двух или нескольких чисел.	295
---	-----

3.4. Универсальные приёмы и методы решения уравнений и неравенств 301

Разложение на множители (301). Метод замены переменных (302). Метод неопределённых коэффициентов (306). Метод «от частного к общему» (308). Графический подход (метод координат) (312). Умножение на функцию (317). Уравнения вида $f(x) = g(x)$, где $f(x) \leq A$, $g(x) \geq A$, и другие задачи этого типа. Метод оценок (318). Уравнения и неравенства вида $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ имеют разную монотонность (325). Уравнения и неравенства вида $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$, $\varphi(f(x)) < \varphi(g(x))$, где φ – строго монотонная функция. Применение к уравнению (неравенству) монотонной функции (327). Уравнения и неравенства вида $\underbrace{f(f(f(\dots f(x))))}_n = x$, $\underbrace{f(f(f(\dots f(x))))}_n > x$, где

$n \geq 2$, $n \in N$ (331). Уравнения вида $f(x) = f^{-1}(x)$, где $f(x)$, $f^{-1}(x)$ – взаимно обратные возрастающие функции (334). Геометрический подход (335). Функциональные уравнения (336). Вспомогательные приёмы и средства: формулы сокращённого умножения (340); выделение полного квадрата (куба) (340); рассмотрение уравнения относительно некоторой величины (342).

Раздел 4

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

К разделу 1.	345
К разделу 2.	360
К разделу 3.	364
Ответы и решения.	414
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Список условных обозначений.	465
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Основные методы элементарной математики.	466
Предметный указатель.	467
Литература.	470