

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	8
Часть I. Хаос: основные концепции, простые модели и физические системы	
Лекция 1. Динамические системы и хаос.	
Историческое введение	9
1.1. Механика	10
1.2. Статистическая физика	11
1.3. Теория колебаний, радиофизика и электроника	13
1.4. Гидродинамика	16
1.5. Дискретные отображения	18
1.6. Математика	19
1.7. Прикладной хаос	21
Лекция 2. Хаос в простых моделях динамических систем . . .	24
2.1. Одномерные отображения	28
2.2. Двумерные отображения, сохраняющие площадь	36
2.3. Странные хаотические аттракторы	40
Лекция 3. Система Лоренца	46
3.1. Задача о конвекции в подогреваемом снизу слое	47
3.2. Конвекция в замкнутой петле и водяное колесо	52
3.3. Уравнения динамики одностороннего лазера	55
3.4. Диссипативный осциллятор с инерционной нелиней- ностью	57
Лекция 4. Динамика системы Лоренца	59
4.1. Результаты численного решения уравнений Лоренца	59
4.2. Аналитическое исследование уравнений Лоренца	62
4.3. Бифуркации в модели Лоренца	66

Лекция 5. Хаос в реалистичных моделях физических систем: дифференциальные уравнения и рекуррентные отображения	70
5.1. Модели с дискретным временем	71
5.2. Искусственно сконструированные дифференциальные уравнения	79
5.3. Нелинейные осцилляторы под периодическим внешним воздействием	82
5.4. Автономные системы — электронные генераторы	87
5.5. Пример системы с гиперболическим странным аттрактором Смейла-Вильямса	96
Часть II. Способы описания, свойства и количественные характеристики хаоса	
Лекция 6. Сечение Пуанкаре, подкова Смейла, теорема Шильникова	100
6.1. Сечение Пуанкаре и отображение последования	101
6.2. Подкова Смейла	105
6.3. Теорема Шильникова о петле сепаратрисы седлофокуса	110
Лекция 7. Гомоклиническая структура	115
7.1. Устойчивое и неустойчивое многообразие неподвижной точки и их пересечение	115
7.2. Связь гомоклинической структуры и подковы Смейла	117
7.3. Критерий Мельникова	119
Лекция 8. Функция распределения, инвариантная мера, эргодичность и перемешивание	125
8.1. Функция распределения и инвариантная мера	127
8.2. Эргодичность и перемешивание	131
8.3. Одномерные отображения: инвариантные распределения и уравнение Фробениуса-Перрона	136
8.4. Системы с непрерывным временем, уравнение для функции распределения и портреты странных аттракторов	139
Лекция 9. Устойчивость и неустойчивость. Ляпуновские показатели	143
9.1. Устойчивость по Лагранжу	144
9.2. Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре	144
9.3. Устойчивость по Ляпунову	146
Лекция 10. Ляпуновские показатели для отображений. Методы численной оценки ляпуновских показателей	156
10.1. Обобщение ляпуновских показателей на рекуррентные отображения	156

10.2. Примеры аналитического расчета ляпуновских показателей	158
10.3. Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя	161
10.4. Ортогонализация Грама-Шмидта и вычисление спектра ляпуновских показателей	163
10.5. Примеры численного расчета ляпуновских показателей	165
10.6. Зависимость ляпуновского показателя от параметра	168
10.7. Двухпараметрический анализ и карты ляпуновских показателей	171

Лекция 11. Геометрия странных аттракторов и фрактальная размерность 174

11.1. Фракталы	176
11.2. Фрактальная размерность — емкость	180
11.3. Размерность Хаусдорфа и ее связь с емкостью	181
11.4. Фрактальная размерность двухмасштабного канторова множества и странного аттрактора в обобщенном отображении пекаря	183

Лекция 12. Обобщенные размерности и мультифрактальный формализм 186

12.1. Информационная размерность	186
12.2. Корреляционная размерность и алгоритм Грассбергера-Прокатча	188
12.3. Спектр обобщенных размерностей Реньи	191
12.4. Усовершенствованное определение и спектр размерностей аттрактора обобщенного отображения пекаря	192
12.5. Скейлинг-спектр	195
12.6. Ляпуновская размерность и формула Каплана-Йорке	198

Лекция 13. Обработка реализаций: реконструкция аттрактора по наблюдаемой, проблема вложения, вычисление характеристик хаотической динамики 201

13.1. Реконструкция фазового пространства методом запаздывания (delay-time reconstruction)	202
13.2. Оценка корреляционной размерности по наблюдаемой	203
13.3. О технических проблемах, возникающих при вычислении размерности. Оценка Экмана-Рюэля	205
13.4. Теорема о вложении	208
13.5. Вычисление ляпуновских показателей по реализации	210
13.6. Идея реконструкции уравнений динамической системы по наблюдаемой реализации	211

Часть III. От порядка к хаосу

Лекция 14. Сценарии перехода к хаосу. Общая дискуссия . . .	215
Лекция 15. Сценарий Фейгенбаума: ренормгруппа, универсальность, скейлинг	228
15.1. Переход к хаосу в логистическом отображении	228
15.2. Уравнение РГ	232
15.3. Линеаризованное уравнение РГ	235
15.4. Скейлинг	239
Лекция 16. Критический аттрактор Фейгенбаума	243
16.1. Критический аттрактор, как фрактал	243
16.2. О последовательности посещения точек на критическом аттракторе	247
16.3. Символическая динамика в критической точке	248
16.4. Сигма-функция	250
16.5. Спектр Фурье	251
16.6. О переходе к хаосу через удвоения периода в реальных системах и моделях в виде дифференциальных урав- нений	254
Лекция 17. Перемежаемость	259
17.1. Перемежаемость типа I: примеры	259
17.2. Перемежаемость типа I: теория	265
17.3. Ренормгрупповой подход к анализу перемежаемости . . .	269
Лекция 18. Квазипериодическая динамика и переход к хаосу в отображении окружности	272
18.1. Отображение окружности	272
18.2. Динамика отображения окружности	273
18.3. Цепные дроби	278
18.4. Уравнение РГ: общий случай	279
18.5. РГ анализ критической точки, отвечающей золотому сред- нему	281
Лекция 19. Критическая динамика и свойства скейлинга в случае числа вращения, заданного золотым средним	285
19.1. Критический аттрактор GM	286
19.2. Скейлинг на критической линии	290
19.3. Скейлинг языков Арнольда на плоскости параметров . .	292
Лекция 20. Многопараметрический анализ перехода к хаосу через удвоения периода. Одномерные отображения	296
20.1. Типы критического поведения, связанные с неподвиж- ными точками уравнения ренормгруппы	299

20.2. Одномерные бимодальные отображения и множество критических точек коразмерности два на границе хаоса . . .	309
Лекция 21. Многопараметрический анализ перехода к хаосу через удвоения периода.	
Двумерные отображения	316
21.1. Двумерное обобщение уравнения Фейгенбаума-Цвитановича	316
21.2. Двумерное отображение, описывающее систему элементов с однонаправленной связью. Бикритическая точка . .	317
21.3. Гамильтоновская критичность (Н-тип)	321
21.4. Критическое поведение типа FQ	323
21.5. Критическое поведение типа C	326
Лекция 22. Типы критического поведения, связанные с удвоениями периода, в реалистичных системах и моделях	331
Список литературы	343