

Содержание

Предисловие	7
Лекция 1. Кривые в евклидовом пространстве. Плоские кривые	9
1.1. Параметрические кривые	9
1.2. Кривые-графики и неявные кривые	11
1.3. Определение регулярной кривой	12
1.4. Длина кривой, натуральный параметр	13
1.5. Кривизна регулярной кривой	15
1.6. Плоские кривые	15
Задачи	18
Дополнительный материал	18
Лекция 2. Кривые в трехмерном пространстве	27
2.1. Формулы Френе	27
2.2. Натуральные уравнения	29
Задачи	31
Дополнительный материал	32
Лекция 3. Поверхности. Первая фундаментальная форма поверхности	33
3.1. Параметрические поверхности	33
3.2. Поверхности-графики и неявные поверхности	34
3.3. Определение регулярной поверхности	36
3.4. Отображения регулярной поверхности	37
3.5. Кривые на поверхности, координатные линии, касательное пространство, канонический базис	38
3.6. Первая фундаментальная форма поверхности, или индуцированная метрика	40
3.7. Изометрии поверхностей	44
Задачи	46
Дополнительный материал	47
Лекция 4. Поверхности. Вторая фундаментальная форма	51
4.1. Определение второй фундаментальной формы регулярной поверхности	51

4.2. Геометрический смысл второй формы — кривизны плоских сечений	54
4.3. Главные кривизны и главные направления	55
4.4. Средняя и гауссова кривизны	58
4.5. О теореме Бонне	61
Задачи	61
Дополнительный материал	62
Лекция 5. Элементы дифференциального исчисления на поверхностях	71
5.1. Деривационные формулы Вейнгартена-Гаусса	71
5.2. Теорема Гаусса	75
5.3. Ковариантная производная касательного векторного поля	76
Дополнительный материал	80
Лекция 6. Геодезические на поверхностях	81
6.1. Определение и простейшие свойства геодезических	81
6.2. Примеры геодезических, теорема Клеро	85
Задачи	89
Дополнительный материал	89
Лекция 7. Криволинейные координаты в области и на поверхности	93
7.1. Определение криволинейной системы координат	93
7.2. Примеры криволинейных систем координат	96
7.3. Касательное пространство к области в точке	97
7.4. Евклидова метрика в криволинейных координатах	99
7.5. Криволинейные координаты на поверхностях	100
7.6. Стереографические координаты на сфере	101
Задачи	103
Дополнительный материал	103
Лекция 8. Риманова и псевдориманова метрики	109
8.1. Риманова метрика и скалярное произведение	110
8.2. Билинейные формы и псевдориманова метрика	111
8.3. Пространство Минковского	114
Задачи	117
Дополнительный материал	117
Лекция 9. Геометрия Лобачевского	121
9.1. Неевклидовы геометрии	121
Эллиптическая геометрия	121
Плоскость Лобачевского (гиперболическая геометрия)	122
9.2. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского	123
9.3. Дробно-линейные преобразования плоскости	124
9.4. Запись метрики в комплексной форме	128
9.5. Модель верхней полуплоскости	129
9.6. Изометрии плоскости Лобачевского	130

Задачи	132
Дополнительный материал	133
Лекция 10. Топологические пространства	139
10.1. Метрические и топологические пространства	139
Метрические пространства	139
Топологические пространства	142
10.2. Непрерывные отображения	145
Задачи	147
Дополнительный материал	148
Лекция 11. Классы топологических пространств	151
11.1. Связность	151
11.2. Аксиомы отделимости	153
11.3. Компактность	155
Задачи	158
Дополнительный материал	159
Лекция 12. Многообразия	163
12.1. Топологические многообразия	163
12.2. Функции и отображения	165
12.3. Гладкие многообразия	166
12.4. Простейшие примеры гладких многообразий	167
12.5. Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизмы	168
12.6. Задание многообразий уравнениями — геометрический смысл теоремы о неявной функции	171
Задачи	174
Дополнительный материал	175
Лекция 13. Касательное пространство к многообразию, дифференциал	177
13.1. Определение касательного вектора	177
13.2. Касательное расслоение	182
13.3. Определение дифференциала	184
13.4. Локальные свойства отображений	185
Задачи	188
Дополнительный материал	189
Лекция 14. Вложения многообразий в евклидово пространство	193
14.1. Существование вложения	193
14.2. Теорема Сарда	195
14.3. Теорема Уитни	198
Задачи	200
Дополнительный материал	201
Лекция 15. Дополнительные структуры: риманова метрика, ориентируемость	203
15.1. Риманова метрика, римановы многообразия	203

15.2. Изометрии	207
15.3. Ориентируемость многообразия	207
Задачи	212
Дополнительный материал	213
Лекция 16. Классификация связных компактных дву- мерных многообразий	215
16.1. Склейки многоугольников	215
16.2. Заклеивание сферы	217
16.3. Теорема классификации	219
Триангуляции	219
Канонические склейки многоугольников	220
Последний шаг, эйлерова характеристика	221
Вместо послесловия	224
Список литературы	224