

Оглавление

Предисловие	8
Глава 0. Кунсткамера теории чисел	
§ 0.1. Числовые поля и расширения полей	14
§ 0.2. Целые алгебраические числа	19
§ 0.3. Идеалы в кольцах целых	24
§ 0.4. Единицы	35
§ 0.5. Группа классов	38
§ 0.6. Нормирования	40
§ 0.7. Пополнения	46
§ 0.8. Адели и иделы	53
§ 0.9. Квадратичные формы	58
Глава 1. Клейновы группы и гиперболические многообразия	
§ 1.1. $PSL(2, \mathbb{C})$ и трехмерное гиперболическое пространство	67
§ 1.2. Подгруппы в $PSL(2, \mathbb{C})$	71
§ 1.3. Гиперболические многообразия и орбифолды	76
§ 1.4. Примеры	79
1.4.1. Группы Бьянки	80
1.4.2. Группы Кокстера	81
1.4.3. Дополнение к узлу «восьмерка»	82
1.4.4. Построение гиперболических многообразий с помощью склейки	83
§ 1.5. Топология трехмерных многообразий и хирургия Дена	86
1.5.1. Трехмерные многообразия	86
1.5.2. Гиперболические многообразия	88
1.5.3. Хирургия Дена	89
§ 1.6. Жесткость	92
§ 1.7. Объемы и идеальные тетраэдры	95
§ 1.8. Указания по дальнейшему чтению	101
Глава 2. Кватернионные алгебры I	
§ 2.1. Кватернионные алгебры	102
§ 2.2. Порядки в кватернионных алгебрах	108
§ 2.3. Кватернионные алгебры и квадратичные формы	112
§ 2.4. Ортогональные группы	118
§ 2.5. Кватернионные алгебры над действительными числами	120
§ 2.6. Кватернионные алгебры над \mathcal{P} -адическими полями	122

§ 2.7.	Кватернионные алгебры над числовыми полями	127
§ 2.8.	Центральные простые алгебры	131
§ 2.9.	Теорема Сколема—Нётер	135
§ 2.10.	Указания по дальнейшему чтению	140
Глава 3.	Инвариантные поля следов	
§ 3.1.	Поля следов для клейновых групп конечного кообъема	141
§ 3.2.	Кватернионные алгебры, соответствующие подгруппам в $SL(2, \mathbb{C})$	144
§ 3.3.	Инвариантные поля следов и кватернионные алгебры	147
§ 3.4.	Соотношения для следов	152
§ 3.5.	Образующие полей следов	155
§ 3.6.	Образующие инвариантных кватернионных алгебр	160
§ 3.7.	Указания по дальнейшему чтению	16
Глава 4.	Примеры	
§ 4.1.	Группы Бьянки	164
§ 4.2.	Дополнения к узлам и зацеплениям	165
§ 4.3.	Гиперболические расслоения	167
§ 4.4.	Дополнение к узлу «восьмерка»	168
	4.4.1. Образующие и соотношения	168
	4.4.2. Идеальные тетраэдры	169
	4.4.3. Расслоение на проколотые торы	169
§ 4.5.	Двухмостовые узлы и зацепления	172
§ 4.6.	Расслоения на проколотые торы	174
§ 4.7.	Группы многогранников	176
	4.7.1. Некомпактные тетраэдры	177
	4.7.2. Компактные тетраэдры	179
	4.7.3. Призмы и нецелые следы	182
§ 4.8.	Примеры на хирургию Дена	186
	4.8.1. Йоргенсеневские расслоения с компактным слоем	186
	4.8.2. Многообразия Фибоначчи	188
	4.8.3. Многообразии Уикса—Матвеева—Фоменко	191
§ 4.9.	Фуксовы группы	195
§ 4.10.	Указания по дальнейшему чтению	199
Глава 5.	Приложения	
§ 5.1.	Критерии дискретности	202
§ 5.2.	Теорема Басса	205
	5.2.1. Дерево группы $SL(2, K_p)$	206
	5.2.2. Нецелые следы	207
	5.2.3. Амальгамированное произведение	210
§ 5.3.	Геодезические и вполне геодезические поверхности	212

5.3.1. Многообразия без геодезических поверхностей	212
5.3.2. Вложенные геодезические поверхности	213
5.3.3. Случай групп, не являющихся кокомпактными	216
5.3.4. Простые геодезические	218
§ 5.4. Дальнейшие препятствия, связанные с символом Гильберта . .	221
§ 5.5. Геометрическая интерпретация инвариантного поля следов . .	224
§ 5.6. Построение инвариантных полей следов	231
§ 5.7. Указания по дальнейшему чтению	237
Глава 6. Порядки в кватернионных алгебрах	
§ 6.1. Целые элементы, идеалы и порядки	240
§ 6.2. Локализация	243
§ 6.3. Дискриминанты	249
§ 6.4. Локальный случай I	252
§ 6.5. Локальный случай II	255
§ 6.6. Порядки в глобальном случае	261
§ 6.7. Число типов для кватернионной алгебры	264
§ 6.8. Указания по дальнейшему чтению	272
Глава 7. Кватернионные алгебры II	
§ 7.1. Адели и иделы	274
§ 7.2. Двойственность	278
§ 7.3. Классификация кватернионных алгебр	284
§ 7.4. Теорема о норме	289
§ 7.5. Локальные меры Тамагавы	290
§ 7.6. Числа Тамагавы	297
§ 7.7. Сильная теорема об аппроксимации	300
§ 7.8. Указания по дальнейшему чтению	304
Глава 8. Арифметические клейновы группы	
§ 8.1. Дискретные группы, получающиеся из порядков в кватернион- ных алгебрах	306
§ 8.2. Арифметические фуксовы группы	310
§ 8.3. Теорема идентификации	314
§ 8.4. Полная система инвариантов соизмеримости	322
§ 8.5. Целые алгебраические числа и порядки	327
§ 8.6. Указания по дальнейшему чтению	330
Глава 9. Трехмерные арифметические гиперболические многообразия и орбифолды	
§ 9.1. Группы Бьянки	332
§ 9.2. Дополнения к арифметическим зацеплениям	334
§ 9.3. Множества Циммерта и каспидальные когомологии	340
§ 9.4. Единственный арифметический узел	345

§ 9.5.	Фуксовы подгруппы арифметических клейновых групп	346
§ 9.6.	Фуксовы подгруппы групп Бьянки и приложения	352
§ 9.7.	Простые геодезические	359
§ 9.8.	Забавные мелочи	362
9.8.1.	Конечные подгруппы A_4 , S_4 и A_5	362
9.8.2.	Снова многообразие Уикса	363
§ 9.9.	Указания по дальнейшему чтению	366
Глава 10. Дискретные арифметические группы		
§ 10.1.	Ортогональные группы	369
§ 10.2.	$SO(3, 1)$ и $SO(2, 1)$	373
§ 10.3.	Общие дискретные арифметические группы и теорема Маргу- лиса	381
§ 10.4.	Группы, порожденные отражениями	389
10.4.1.	Арифметические группы многогранников	393
10.4.2.	Тетраэдральные группы	394
10.4.3.	Примеры с призматическими группами	395
§ 10.5.	Указания по дальнейшему чтению	398
Глава 11. Соизмеримые арифметические группы и объемы		
§ 11.1.	Кообъемы для максимальных порядков	400
§ 11.2.	Следствия из формулы объема	408
11.2.1.	Арифметические клейновы группы ограниченного ко- объема	408
11.2.2.	Объемы для эйхлеровских порядков	410
11.2.3.	Арифметические многообразия равного объема	411
11.2.4.	Оценки объемов	413
11.2.5.	Пример с тетраэдральной группой	414
§ 11.3.	Фуксовы группы	417
11.3.1.	Арифметические фуксовы группы ограниченного ко- объема	417
11.3.2.	Вполне вещественные поля	417
11.3.3.	Фуксовы треугольные группы	418
11.3.4.	Сигнатуры арифметических фуксовых групп	422
§ 11.4.	Максимальные дискретные группы	424
§ 11.5.	Распределение объемов	430
§ 11.6.	Наименьший кообъем	432
§ 11.7.	Группы наименьшего кообъема	438
§ 11.8.	Указания по дальнейшему чтению	445
Глава 12. Длина и кручение в арифметических гиперболических орби- фолдах		
§ 12.1.	Локсодромические элементы и геодезические	448

§ 12.2. Геодезические и вложения в кватернионные алгебры	450
§ 12.3. Короткие геодезические; гипотезы Лемера и Салема	455
§ 12.4. Изоспектральность	462
§ 12.5. Кручение в арифметических клейновых группах	477
§ 12.6. Снова вычисления объемов	490
§ 12.7. Объемы неарифметических многообразий	497
§ 12.8. Указания по дальнейшему чтению	501
Глава 13. Приложения	
§ 13.1. Компактные гиперболические тетраэдры	503
§ 13.2. Некомпактные гиперболические тетраэдры	504
13.2.1. Арифметические группы	504
13.2.2. Неарифметические группы	505
§ 13.3. Арифметические фуксовы треугольные группы	505
§ 13.4. Гиперболические дополнения к узлам	506
§ 13.5. Замкнутые многообразия малого объема	509
§ 13.6. Некомпактные многообразия малого объема	514
§ 13.7. Арифметический зоопарк	518
13.7.1. Некомпактные примеры	518
13.7.2. Компактные примеры: поля степени 2	520
13.7.3. Компактные примеры: кубические поля	521
13.7.4. Компактные примеры, поля степени 4	522
Послесловие редактора перевода	524
Литература	525
Предметный указатель	540